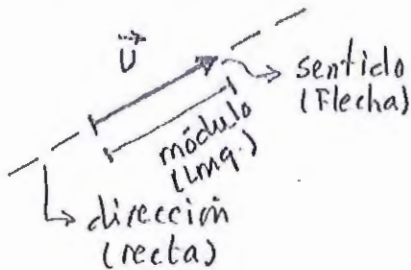


TEMA 1: VECTORES, CENTROS DE GRAVEDAD. MOMENTOS DE INERCIA.

1

DEFINICION

Expresiones matemáticas que poseen módulo, dirección y sentido



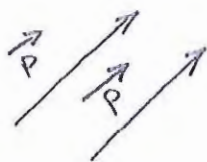
TIPOS

- **FIJO** (ligado) : Entre dos puntos, y no puede cambiar su posición
- **LIBRE** : No está aplicado a ningún punto y se mueve libremente en el espacio.
- **DESILIZANTE** : se puede mover a lo largo de una línea de acción (dirección)

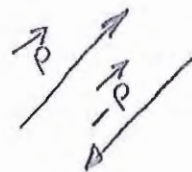


VECTORES IGUALES : Tienen el mismo módulo, dirección y sentido (no mismo punto de aplicación) $\rightarrow$ vectores paralelos

VECTORES OPUESTOS : Tienen el mismo módulo, dirección y sentido opuesto.

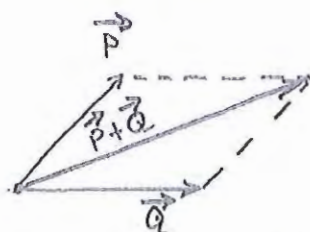


Vectores iguales se representan por la misma letra



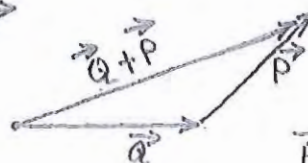
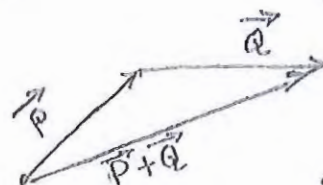
$-\vec{P}$ opuesto de $\vec{P}$

SUMA (ADICION)



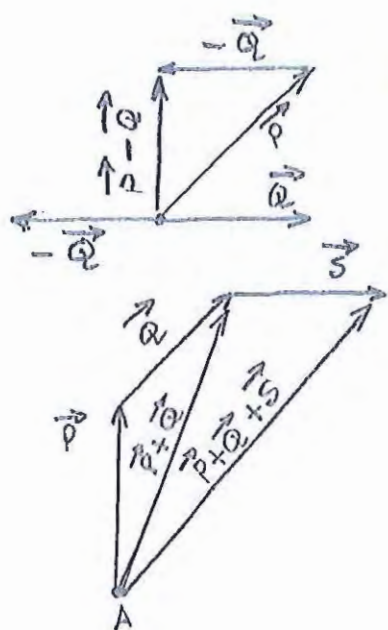
Los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo

Regla del triángulo



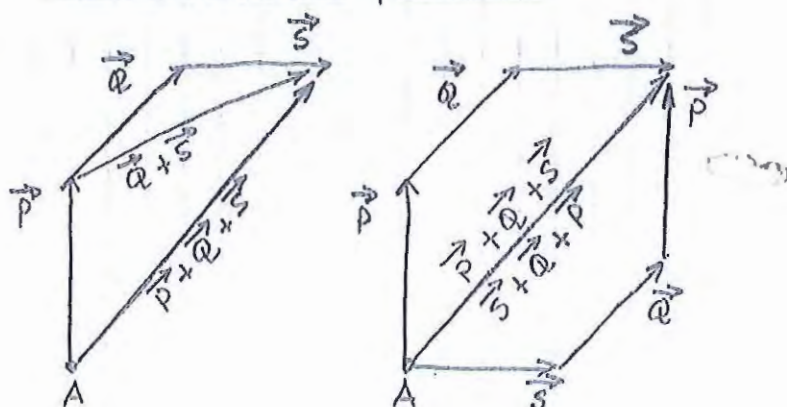
La suma tiene la propiedad conmutativa

$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$



Resta (diferencia) $\rightarrow$ suma del vector opuesto.

Varios vectores coplanarios



Suma: aplicación repetida de la ley del triángulo. Uniendo el extremo de cada uno con el origen del siguiente y conectando el origen del primero ($\vec{P}$) con el extremo del último ($\vec{Q}$) $\rightarrow$ Regla del polígono (Resultante)

Prop. asociativa $\rightarrow \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{S})$

Prop. conmutativa $\rightarrow \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S} = \vec{S} + (\vec{P} + \vec{Q}) = \vec{S} + (\vec{Q} + \vec{P}) = \vec{S} + \vec{Q} + \vec{P}$

Fuerzas concurrentes: Todas las fuerzas que pasan por el mismo punto (A). La suma se define como la resultante

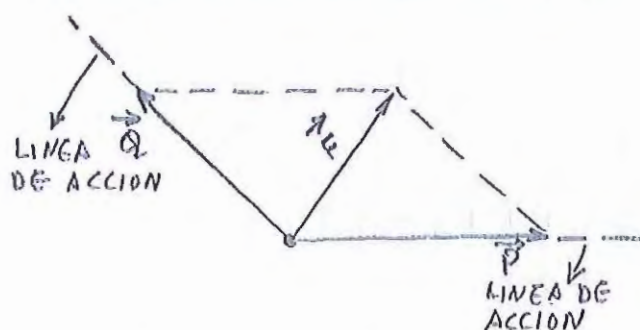
PRODUCTO POR UN ESCALAR

El producto de un escalar k por un vector $\vec{P} \rightarrow$ un vector que tiene la misma dirección que $\vec{P}$ y módulo $k|\vec{P}|$ (k veces el módulo de $\vec{P}$)

si $k > 0 \rightarrow k\vec{P}$ tiene el mismo sentido que $\vec{P}$

si $k < 0 \rightarrow k\vec{P}$ tiene sentido opuesto a $\vec{P}$

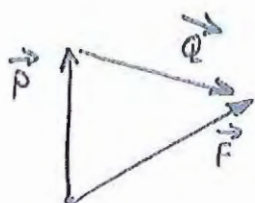
COMPONENTES DE UN VECTOR.



$\vec{Q}$ y $\vec{P}$ componente de $\vec{F}$
 $(\vec{F} = \vec{Q} + \vec{P} = \vec{P} + \vec{Q})$

Descomposición de $\vec{F}$ según dos líneas de acción

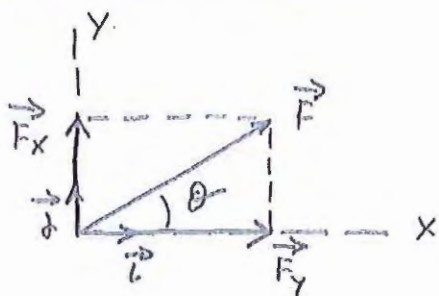
Existen un número infinito de pares de líneas de acción y por tanto de componentes. Dos casos



- Se conoce una de las componentes ($\vec{P}$). $\vec{Q}$ se obtiene cerrando el triángulo de fuerzas.

- Se conocen la direcciones. Las componentes se obtienen mediante la ley del paralelogramo.

COMPONENTES RECTANGULARES



Las líneas de acción según se descompone la fuerza $\vec{F}$ son perpendiculares entre sí.

$\vec{F}_x, \vec{F}_y$ son las componentes rectangulares

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_x = F_x \vec{i} \\ \vec{F}_y = F_y \vec{j} \end{array} \right\} \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_x, \vec{F}_y \text{ componentes vectoriales} \\ F_x, F_y \text{ componentes escalares} \end{array} \right.$$

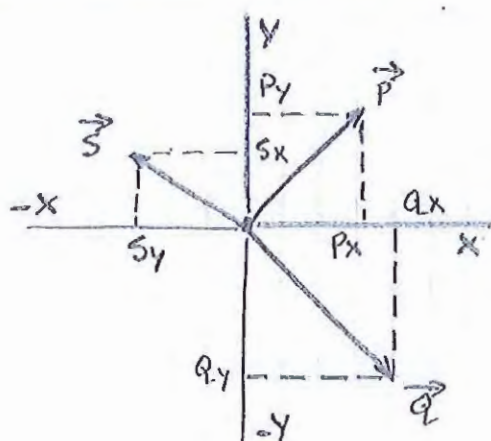
$F = |\vec{F}|$ módulo del vector $\vec{F}$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Componentes escalares $\left\{ \begin{array}{l} F_x = F \cdot \cos \theta \\ F_y = F \cdot \sin \theta \end{array} \right.$

Conocidas $F_x, F_y \rightarrow \tan \theta = F_y / F_x$

SUMA DE VECTORES EN COMPONENTES



$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} \quad \vec{i} \text{ y } \vec{j} \text{ vectores unitarios.}$$

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j}$$

$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j}$$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (P_x + Q_x + S_x) \vec{i} + (P_y + Q_y + S_y) \vec{j}$$

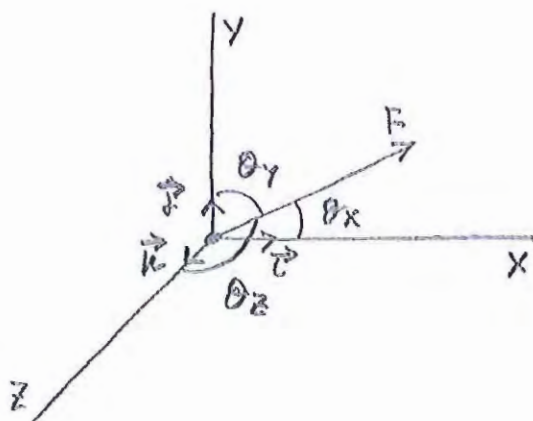
$\vec{R}$ = Resultante de $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$

$$\begin{cases} R_x = \sum F_x = P_x + Q_x + S_x \\ R_y = \sum F_y = P_y + Q_y + S_y \end{cases}$$

Componentes (R_x, R_y) de la resultante ($\vec{R}$) de varios vectores que actúan en un punto, se obtienen sumando algebraicamente (con signo) las componentes escalares de cada vector.

Resultante $\vec{R} \rightarrow \begin{cases} \text{- Descomposición en componentes escalares según } x, y \\ \text{- Suma de componentes } x, y \end{cases}$

VECTORES EN EL ESPACIO



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vectores unitarios rectangulares

F_x, F_y, F_z componentes escalares.

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ cosenos directores

$$\begin{cases} F_x = F \cos \theta_x \\ F_y = F \cos \theta_y \\ F_z = F \cos \theta_z \end{cases} \quad F = |\vec{F}| \text{ módulo } \vec{F}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

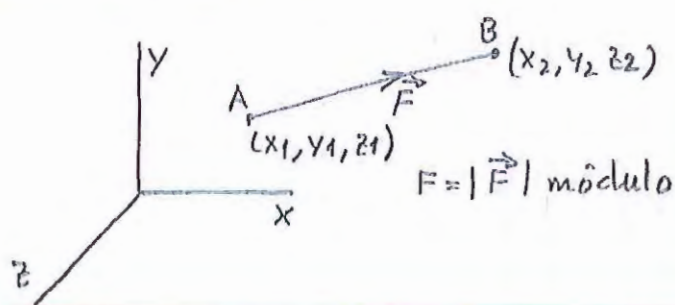
Los cosenos directores, no son independientes:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

Conocido las componentes escalares F_x, F_y, F_z

$\cos \theta_x = F_x/F$, $\cos \theta_y = F_y/F$, $\cos \theta_z = F_z/F$, $F = \text{módulo del vector } \vec{F}$

VECTOR DEFINIDO POR SU MÓDULO Y DOS PUNTOS



$$\vec{AB} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$dx = x_2 - x_1$$

$$dy = y_2 - y_1$$

$$dz = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\cos \theta_x = \frac{dx}{d}, \cos \theta_y = \frac{dy}{d}, \cos \theta_z = \frac{dz}{d}$$

Componentes escalares $F_x = \frac{F dx}{d}$, $F_y = \frac{F dy}{d}$, $F_z = \frac{F dz}{d}$

SUMA DE VECTORES

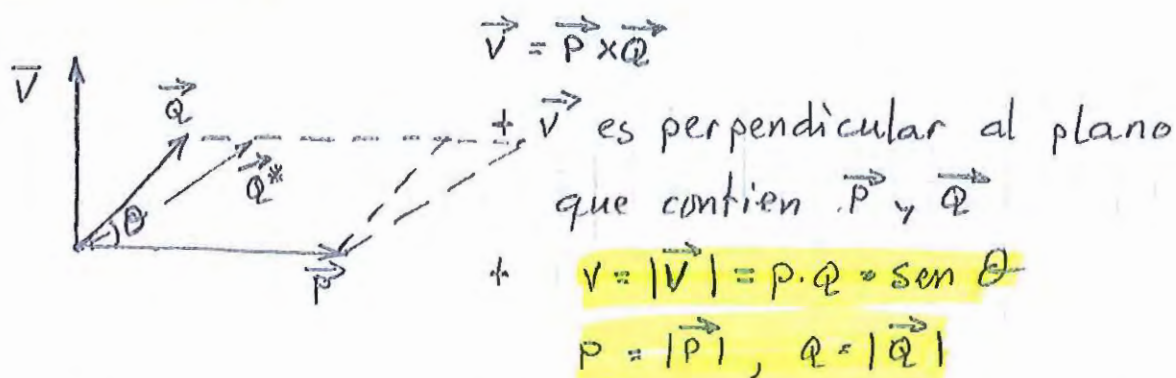
Análogamente al caso de vectores coplanarios

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

En componentes: $R_x = \sum F_x$, $R_y = \sum F_y$, $R_z = \sum F_z$

Módulo: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

Cosenos directores: $\cos \theta_x = R_x/R$, $\cos \theta_y = R_y/R$, $\cos \theta_z = R_z/R$.

PRODUCTO VECTORIAL

+ sentido: triada destrógira. Regla del sacacorchos en sentido contrario a las agujas del reloj.

el módulo $v = \text{área del paralelogramo de lados } p \text{ y } q \text{ (módulos de } \vec{P} \text{ y } \vec{Q})$

$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = \vec{P} \times \vec{Q}^*$$

Por la definición del sentido de $\vec{V}$ se deduce

$$\vec{P} \times \vec{Q} = -(\vec{Q} \times \vec{P}) : \text{No se cumple la propiedad conmutativa}$$

Si se cumple la propiedad distributiva

$$\vec{P} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \times \vec{Q}_1 + \vec{P} \times \vec{Q}_2$$

No es cierta con carácter general la propiedad asociativa

$$(\vec{P} \times \vec{Q}) \times \vec{S} \neq \vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{S})$$

COMPONENTES RECTANGULARES

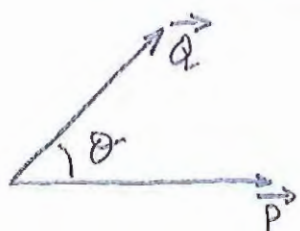
$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

Análogamente $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ y $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$

son las coordenadas rectangulares.

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (-P_x Q_z + P_z Q_x) \vec{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k}$$

PRODUCTO ESCALAR



$\vec{P} \cdot \vec{Q}$ = es un escalar (un número) = $P \cdot Q \cdot \cos \theta$

$P = |\vec{P}|$ y $Q = |\vec{Q}|$ módulos

Es conmutativo $\rightarrow \vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$

Es distributivo $\rightarrow \vec{P} \cdot (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \cdot \vec{Q}_1 + \vec{P} \cdot \vec{Q}_2$

COMPONENTES RECTANGULARES

$P = (P_x, P_y, P_z)$ y $Q = (Q_x, Q_y, Q_z)$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = (P_x, P_y, P_z) \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \text{ (módulo al cuadrado)}$$

+ proyección sobre un eje

$Q \cdot \cos \theta$ = proyección del vector $\vec{Q}$ sobre la dirección $\vec{P}$

$$\text{Proyección de } \vec{Q} \text{ sobre } \vec{P} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{|\vec{P}|} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{P}$$

Proyección será > 0 (positiva) si $\theta < 90^\circ$ (En el sentido de $\vec{P}$)

Proyección será < 0 (negativa) si $\theta > 90^\circ$ (En el sentido contrario de $\vec{P}$)

También, Proyección $\vec{Q}$ sobre $\vec{P} = Q_x \cos \theta_x + Q_y \cos \theta_y + Q_z \cos \theta_z$

con $\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z$: cosenos directores de la dirección de $\vec{P}$

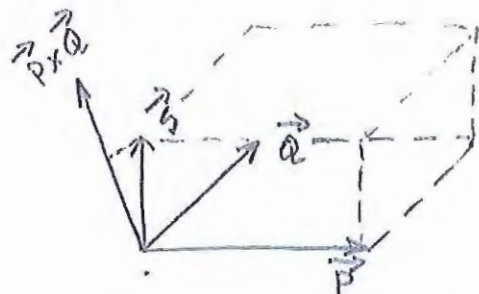
+ Ángulo formado por dos vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{P \cdot Q}$$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q})$ = producto escalar de $\vec{S}$ con el producto vectorial $\vec{P} \times \vec{Q}$. Es un escalar (un número)



Multiplicar el módulo de $\vec{P} \times \vec{Q}$ (área del paralelogramo) por la proyección de $\vec{S}$ sobre $\vec{P} \times \vec{Q}$ (proyección

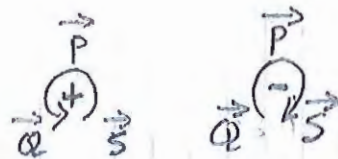
de $\vec{S}$ sobre la normal al plano $\vec{P}$ y $\vec{Q}$). Es decir el producto mixto es igual, en valor absoluto, al volumen de paralelepípedo cuyos lados son los vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{S}$.

El signo de $\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{cases} > 0 & \text{si forman un triada dextrógira} \\ < 0 & \text{" " " " levógira} \end{cases}$

Las seis posibles combinaciones de producto mixto de los tres vectores $\vec{S}$, $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ tienen el mismo valor.

absoluto, pero cambia su signo
se cumple,

$$\begin{aligned}\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) &= \vec{P} \cdot (\vec{Q} \times \vec{S}) = \vec{Q} \cdot (\vec{S} \times \vec{P}) = \\ &= -\vec{S} \cdot (\vec{Q} \times \vec{P}) = -\vec{P} \cdot (\vec{S} \times \vec{Q}) = -\vec{Q} \cdot (\vec{P} \times \vec{S})\end{aligned}$$



COMPONENTES RECTANGULARES

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

$$\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{S} = (S_x, S_y, S_z) \\ \vec{P} = (P_x, P_y, P_z) \\ \vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z) \end{array} \right\} \vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = (V_x, V_y, V_z) \begin{cases} V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z = P_x Q_y - P_y Q_x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) &= S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z = \\ &= S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + \\ &\quad + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x)\end{aligned}$$

expresión que el desarrollo del siguiente determi-
nante.

$$\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

APLICACIONES A LAS FUERZAS

FUERZA

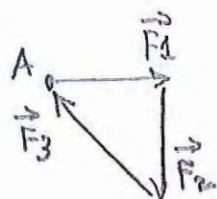
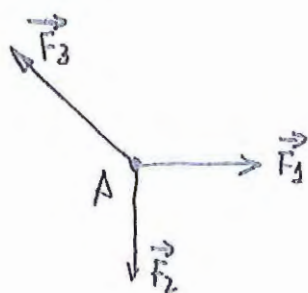
Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real (acción del suelo sobre zapatos) o a distancia (gravedad y magnetismo)

Una fuerza se caracteriza por su punto de aplicación, su módulo, dirección y sentido. y se representa como un vector.

PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD

La fuerza se puede aplicar en cualquier punto de su recta soporte sin que cambien los efectos externos.

EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA



Condición $\rightarrow$ Resultante $\vec{R}$ nula

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{0}$$

El triángulo de fuerzas (polígono en caso espacial) tiene que ser cerrado

Expresiones en coordenadas:

Caso plano:

$$R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 0$$

Caso espacial:

$$R_x = \sum F_x = 0$$

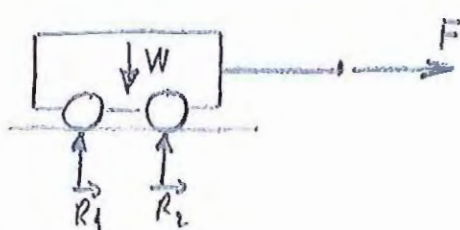
$$R_y = \sum F_y = 0$$

$$R_z = \sum F_z = 0$$

CUERPOS RIGIDOS (SISTEMAS DE FUERZAS)

Cuerpo (sólido) rígido el que no se deforma las estructuras, que no son absolutamente rígidas, se asimilan a sólidos rígidos porque las deformaciones son pequeñas y no afectan a la forma de la estructura.

Diagrama de sólido libre.



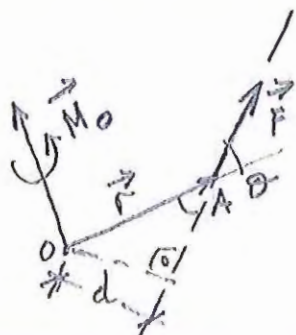
conjunto del sólido (carro) y las fuerzas externas que actúan sobre él

El peso (W) se supone aplicado en el centro de gravedad.

Importante el principio de transmisibilidad

(Fuerzas externas: acción de otro sólido sobre el propio sólido rígido. Fuerzas internas: las que mantienen unidas las diferentes partes del sólido).

MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_O = |\vec{M}_O| = r \cdot F \cdot \sin \theta \quad r = |\vec{r}|, F = |\vec{F}|$$

Mide la tendencia de $\vec{F}$ a hacer girar el sólido alrededor del eje de $\vec{M}_O$

$$r \cdot \sin \theta = d \rightarrow M = F \cdot d$$

Igualdad de fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$

$\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_2$ y $\vec{M}_{O,1} = \vec{M}_{O,2}$, Igualdad de fuerzas (módulo, dirección y sentido) e igualdad de momentos respecto un punto.

En componentes rectangulares

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

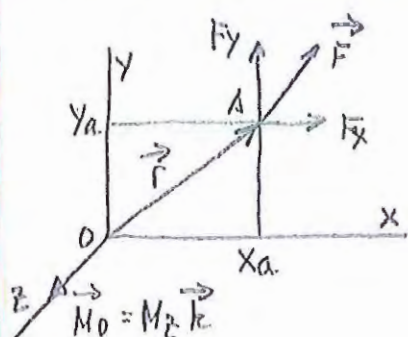
$\vec{r}$ definido por dos puntos: "O" $\rightarrow$ A

Punto "O" coordenadas (x_0, y_0, z_0)

Punto A " " (x_a, y_a, z_a)

$$\vec{r} = (x, y, z) = \begin{cases} x = x_a - x_0 \\ y = y_a - y_0 \\ z = z_a - z_0 \end{cases}$$

Para el caso plano se suprimen las componentes z

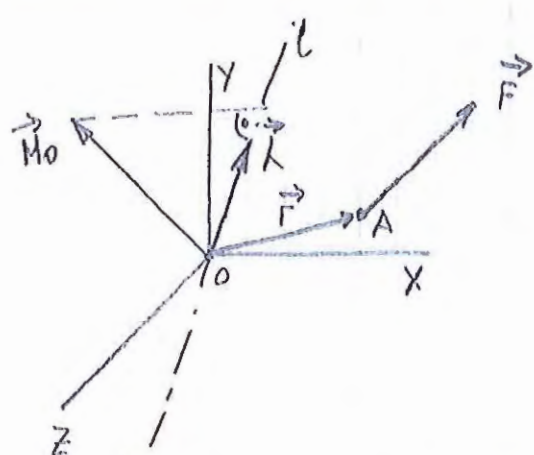


$$\vec{M}_O = \vec{M}_z \cdot \vec{k} = \underbrace{(xF_y - yF_x)}_{M_z} \vec{k}$$

Caso general "O" no coincide con el origen.

$$\vec{M}_O = \vec{M}_z \cdot \vec{k} = \underbrace{[(x_a - x_0)F_y - (y_a - y_0)F_x]}_{M_z} \vec{k}$$

MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$$

M_{ol} = momento de $\vec{F}$ respecto de la línea ol = proyección de $\vec{M}_o$ sobre la línea ol

$$M_{ol} = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (\text{producto mixto})$$

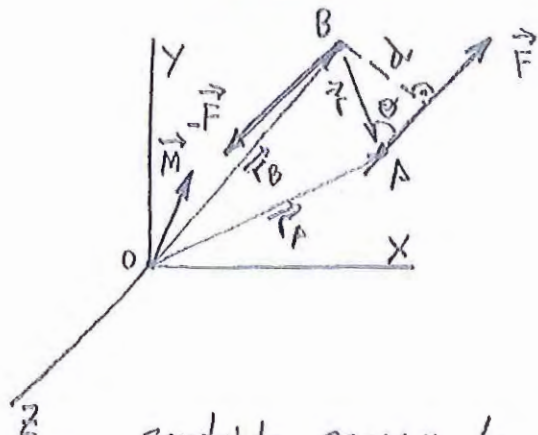
$\vec{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ se suele tomar unitario $\rightarrow \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ son los cosenos directores de la línea ol

$$M_{ol} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \lambda_x (yF_z - zF_y) + \lambda_y (zF_x - xF_z) + \lambda_z (xF_y - yF_x)$$

PARES DE FUERZAS

Par: dos fuerzas de igual módulo, paralelas, no concurrentes y de sentidos opuestos forman un par. Su suma es nula en cualquier dirección

Tomamos momentos respecto de "o"



$$\vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} ; \vec{M} = \text{momento del par}$$

$$M = |\vec{M}| = rF \sin \theta = F \cdot d.$$

sentido según la regla del sacacorchos con la mano derecha.

SUMA DE PARES.

Serie de pares $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \dots, \vec{M}_n$

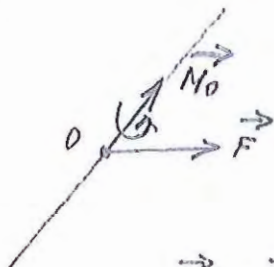
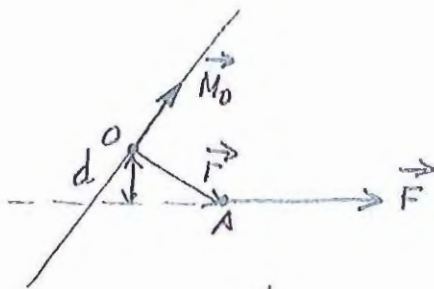
$$\vec{M}_i = (M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}) \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

Sea $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$ el par resultante

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum_i M_{ix} \\ M_y &= \sum_i M_{iy} \\ M_z &= \sum_i M_{iz} \end{aligned} \right\} i=1, 2, 3, \dots, n$$

$$M = |\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\text{Cosenos directores} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \theta_x &= \frac{M_x}{M} = \frac{\sum M_{ix}}{M} \\ \cos \theta_y &= \frac{M_y}{M} = \frac{\sum M_{iy}}{M} \\ \cos \theta_z &= \frac{M_z}{M} = \frac{\sum M_{iz}}{M} \end{aligned} \right.$$

DESCOMPOSICION DE UNA FUERZA EN UNA FUERZA Y UN PAR

Cualquier fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un sólido rígido puede moverse a un punto cualquiera "O" siempre que se agregue un par de momento igual al momento de $\vec{F}$ con respecto a "O"

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad M_0 = |\vec{M}_0| = F_{\perp} d$$

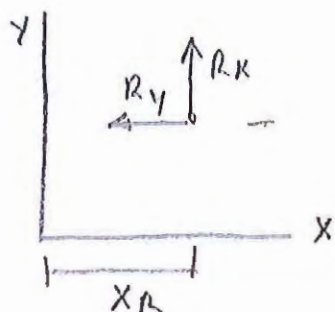
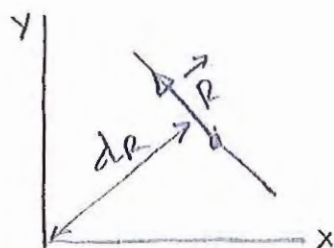
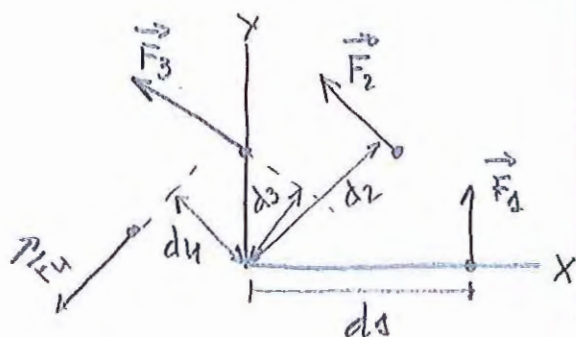
REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

Dos sistemas de fuerzas se dicen que son equivalentes si producen el mismo efecto exterior al aplicarlos a un sólido rígido

Resultante de fuerzas $\rightarrow$ sistema equivalente más sencillo. Puede ser:

- Una fuerza $\vec{F}$
- Un par $\vec{M}_0$ (momento)
- $\vec{F}, \vec{M}_0$ (caso más general)

Fuerzas coplanarias



$$\vec{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}) \quad i=1,2,3,4$$

$$\text{Resultante } \vec{R} = (R_x, R_y)$$

$$R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy}, \quad i=1,2,3,4$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\text{posición } \cos \theta_x = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R}$$

$$R d_p = \sum F_i d_i \quad d_p = \frac{\sum F_i d_i}{R} \quad i=1,2,3,4$$

$$F_i = |\vec{F}_i| = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}$$

la suma es algebraica.

$$x_p = \frac{\sum F_i d_i}{R_y}$$

$$y_p = \frac{\sum F_i d_i}{R_x}$$

Fuerzas en el espacio (caso general)

$$\vec{F}_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Resultante } \vec{R} = (R_x, R_y, R_z) \quad \left. \begin{array}{l} R_x = \sum F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \\ R_z = \sum F_{iz} \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\text{posición } \cos \theta_x = \frac{R_x}{R}, \cos \theta_y = \frac{R_y}{R}, \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}$$

$$\text{Par resultante } \vec{M}_{OR} = \sum \vec{M}_{O_i} = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{ORx} = \sum M_{O_i x} \\ M_{ORy} = \sum M_{O_i y} \\ M_{ORz} = \sum M_{O_i z} \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

$$M_{OR} = |\vec{M}_{OR}| = \sqrt{M_{ORx}^2 + M_{ORy}^2 + M_{ORz}^2}$$

$$\text{posición } \cos \theta_x = \frac{M_{ORx}}{M_{OR}}, \cos \theta_y = \frac{M_{ORy}}{M_{OR}}, \cos \theta_z = \frac{M_{ORz}}{M_{OR}}$$

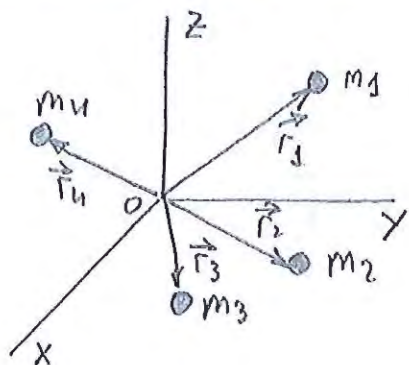
EQUILIBRIO DEL SOLIDO RIGIDO

$$\text{Condiciones } \sum \vec{F} = \vec{0}, \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{0}$$

$$\text{En componentes } \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

CENTRO DE MASA CENTRO GRAVEDAD



m_i = masas

$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ Vector posición

Momento masa i respecto "o"

$$\vec{M}_i = m_i \cdot \vec{r}_i$$

En componentes $M_{xi} = m_i \cdot x_i$, $M_{yi} = m_i \cdot y_i$, $M_{zi} = m_i \cdot z_i$

Centro de masas (G) : El punto de un sistema de masas aisladas o de un volumen físico donde puede concentrarse toda la masa ($\sum m_i$) de manera que el momento de la masa concentrada respecto a un eje (o punto) es igual al momento respecto al mismo eje (o punto) de las masas aisladas o distribuida.

Vector posición $\vec{r}_G$ de G : $\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$

En componentes $x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$; $y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$; $z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$

En el caso de masas distribuidas.

$$x_G = \frac{\int x \, dm}{\int dm} ; y_G = \frac{\int y \, dm}{\int dm} ; z_G = \frac{\int z \, dm}{\int dm}$$

Centro de gravedad : El punto de un cuerpo o sistema de masas donde se puede considerar aplicado el peso (W)

Se admite que el tamaño del cuerpo (o sistema) es despreciable frente al de la Tierra. Además, se

supone que las rectas de actuación de las fuerzas que la Tierra ejerce sobre los distintos puntos materiales del cuerpo son paralelas entre sí (en realidad coinciden en el centro de la Tierra)

Entonces, $W = mg \rightarrow$ CENTRO GRAVEDAD $\equiv$ CENTRO MASAS

Sistema aislado: $x_G = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, y_G = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}, z_G = \frac{\sum w_i z_i}{\sum w_i}$

sistema continuo: $x_G = \frac{\int x dw}{\int dw}, y_G = \frac{\int y dw}{\int dw}, z_G = \frac{\int z dw}{\int dw} (*)$

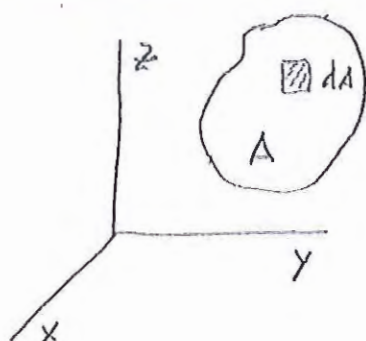
VOLUMENES

$$dw = \gamma dv \quad \gamma = \text{cte} \quad \int dw = \gamma \cdot \int dv = \gamma V$$

$$x_G = \frac{\int x dv}{V}, y_G = \frac{\int y dv}{V}, z_G = \frac{\int z dv}{V} (**)$$

si γ no es constante (volumenes no homogéneos) las ecuaciones (**) obtienen el centro geométrico (centroide) que no coincide con el centro de gravedad dado por (*)

AREAS



Placa de espesor pequeño t (rebanada)
 $dv = t dA \quad V = tA$

$$x_G = \frac{1}{A} \int x dA, y_G = \frac{1}{A} \int y dA,$$

$$z_G = \frac{1}{A} \int z dA, \text{ en el caso de una superficie plana contenida en uno}$$

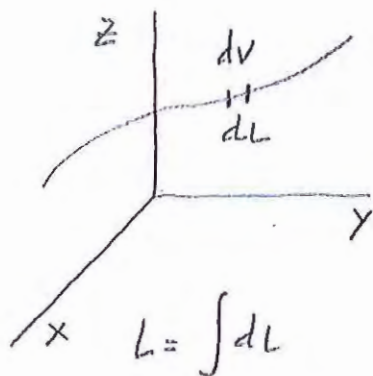
de los planos coordenados, sólo se necesitan dos coordenadas para definir el centro de gravedad (G)

LÍNEAS

Sea un alambre, curvo, homogéneo y de pequeña sección recta A y longitud L

$$dV = A \cdot dL$$

las ecuaciones (*,*) se reducen a



$$x_G = \frac{1}{L} \int x dL, \quad y_G = \frac{1}{L} \int y dL$$

$$z_G = \frac{1}{L} \int z dL$$

CENTROS DE GRAVEDAD DE CUERPOS COMPUESTOS

Supongamos que un cuerpo (sólido) lo descomponemos (dividimos) en partes de las que se conoce su centro de gravedad, entonces obtendremos su centro de gravedad de la siguiente forma.

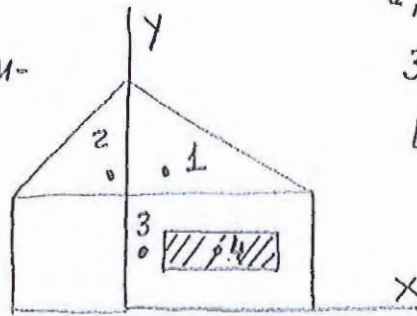
$$A = \sum A_i \quad A_i: \text{áreas elementales}$$

x_i, y_i, z_i componentes del centro de gravedad de las áreas elementales.

$$x_G = \frac{1}{A} \sum A_i x_i, \quad y_G = \frac{1}{A} \sum A_i y_i, \quad z_G = \frac{1}{A} \sum A_i z_i$$

Análogamente para volúmenes y líneas.

DES COMPOSITION
DE VV AREA
EN AREAS SIM-
PLES

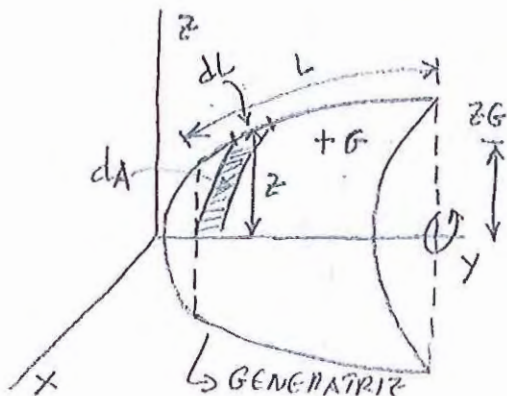


1, 2 Triángulos

3 Rectángulo

4 Rectángulo : el área se considera negativa (aligeramiento).

SOLIDOS DE REVOLUCION. TEOREMAS DE PAPPUS-GULON



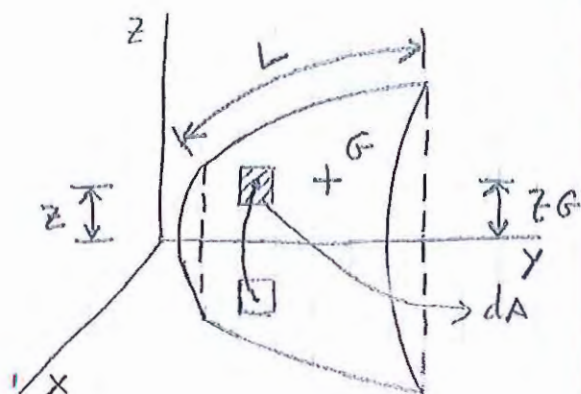
TEOREMA 1: El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generadora multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad de la curva al generar la superficie

dA : área al girar dL (diferencial de longitud)

$dA = 2\pi z dL$ (circunferencia recorrida por dL)

$$\left. \begin{aligned} A &= \int 2\pi z dL = 2\pi \int z dL \\ zG &= \frac{1}{L} \int z dL \end{aligned} \right\} \underline{A = 2\pi L zG}$$

TEOREMA 2: El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generadora por la distancia recorrida por el centro de gravedad del área al generar el cuerpo



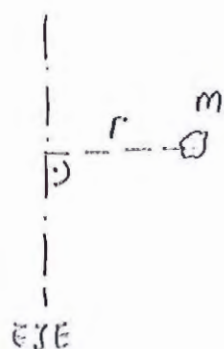
$$dv = \text{volumen al girar } dA$$

$$dv = 2\pi z dA, \quad V = \int 2\pi z dA = 2\pi \int z dA$$

$$\text{con } z_G = \frac{1}{A} \int z dA$$

$$V = 2\pi A z_G$$

MOMENTOS DE INERCIA

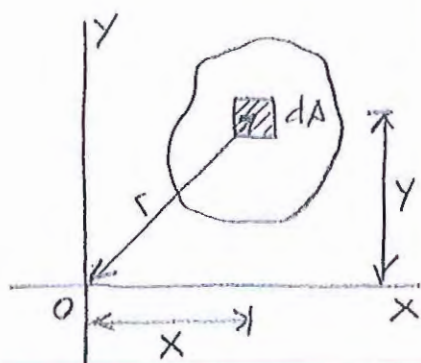


$I = m r^2$: momento de inercia de m respecto al eje

sólido continuo

$$I = \int_V r^2 dm.$$

AREAS PLANAS



$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

I_x, I_y , momentos de inercia respecto los ejes x, y respectivamente

$$I_o = \text{momento polar de inercia} = \int_A r^2 dA.$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = \underline{I_y + I_x}$$